TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Los racionales diádicos

Los racionales diádicos son los números racionales de la forma $\frac{j}{2^n}$, donde $n \in \{0, 1, \ldots\}$ y j es un número entero. El conjunto de los racionales diádicos es muy utilizado en la teoría de la probabilidad y en la teoría de la medida, ya que es muy cómodo trabajar con ellos y, al igual que el conjunto de todos los números racionales, es denso en cualquier intervalo $[a, b]$, donde $a < b$. Lo denotaremos por $\mathbb{D}$. Este conjunto es el que se utiliza para escribir cualquier número real en base 2.

Denotaremos por $\mathbb{B}$ al conjunto

$$\left\{(s_k)_{k\in\mathbb{N}} : s_k \in \{0, 1\} \text{ y } s_k = 1 \text{ para una infinidad de índices } k\right\}$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathbb{B}_n$ al conjunto

$$\{(s_1, s_2, \ldots, s_n) : s_j \in \{0, 1\} \text{ para cualquier } j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

y, para cada elemento $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{B}_n$, denotaremos por $I_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)}$ al intervalo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{2^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}\right]$$

Obsérvese que $I_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)} \subset (0, 1]$ para cualquier $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{B}_n$. En efecto, se tiene:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Consideremos la función $f : \mathbb{B} \to (0, 1]$ definida por

$$f\left((s_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{2^k}$$

Vamos a mostrar que esta función f es biyectiva.

La idea consiste en que si desarrollamos en base 2 un número real $x \in (0, 1]$, su desarrollo es único a menos que x sea un racional diádico. Por ejemplo, el número real $\frac{7}{2^4}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{7}{2^4} = \frac{1}{2^4} + \frac{6}{2^4} = \frac{1}{2^4} + \frac{3}{2^3} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^3} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}$$

Así que uno de sus desarrollos en base 2, está dado por

$$\frac{7}{2^4} = 0.0111$$

Pero, también se tiene:

$$0.01101111\cdots = \frac{3}{8} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{3}{8} + \frac{\frac{1}{2^5}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{7}{2^4}$$

Así que, $0.01101111\cdots$ también es un desarrollo en base 2 de $\frac{7}{2^4}$.

El segundo desarrollo tiene la característica de que contiene una infinidad de 1's.

Por otra parte, si un número real $x \in (0,1]$ tiene un desarrollo en base 2 finito, entonces x es un racional diádico.

Por lo tanto, si $x \in (0,1]$ no es un racional diádico, su desarrollo en base 2 es único y contiene una infinidad de 1's.

Así que, tomando siempre el desarrollo, en base 2, que contiene una infinidad de 1's, de un número real $x \in (0,1]$, su desarrollo es único y ese desarrollo está formado por una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}$.

Pasemos a la demostración formal del resultado.

Proposición 1. *La función* $f : \mathbb{B} \to (0,1]$ *definida por*

$$f\left((s_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{2^k}$$

es biyectiva.

Demostración

Sea $x \in (0,1]$ y $s_1, s_{2,} \ldots$ los términos de su desarrollo que contiene una infinidad de 1's. Entonces la sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pertenece a $\mathbb{B}$ y se tiene:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}$$

Así que f es una función suprayectiva de $\mathbb{B}$ en el intervalo $(0,1]$.

Mostremos ahora que f es inyectiva.

Sean $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos elementos distintos de $\mathbb{B}$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{2^k}$ y $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{2^k}$.

Obsérvemos que tanto x como y pertenecen al intervalo $(0,1]$.

Definamos

$$k_0 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : r_k \neq s_k\}$$

Como el desarrollo de x tiene una infinidad de 1's, se tiene:

$$x > \textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}$$

Además:

$$x \leq \textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}$$

Por lo tanto:

$$x \in \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$$

De manera similar, se tiene:

$$y \in \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$$

Además:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} = \frac{r_{k_0}}{2^{k_0}} - \frac{s_{k_0}}{2^{k_0}} = \frac{r_{k_0} - s_{k_0}}{2^{k_0}}$$

Así que:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{r_{k_0} - s_{k_0}}{2^{k_0}}$$

Por lo tanto:

$$\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right] = \left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{r_{k_0} - s_{k_0}}{2^{k_0}}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{r_{k_0} - s_{k_0}}{2^{k_0}} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$$

$$= \begin{cases} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{2}{2^{k_0}}\right] & \text{si } r_{k_0} - s_{k_0} = 1 \\ \left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} - \frac{1}{2^{k_0}}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}\right] & \text{si } r_{k_0} - s_{k_0} = -1 \end{cases}$$

En cualquiera de los dos casos, los intervalos $\left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$ y $\left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$ son ajenos.

Así que $x \neq y$, lo cual demuestra que f es inyectiva.

$\blacksquare$

Ahora recordemos cómo se encuentran geométricamente los dígitos del desarrollo en base 2 de un número real $x \in (0,1]$, de tal manera que si x es un racional diádico, entonces tomamos el desarrollo que contiene una infinidad de 1's.

Se parte del intervalo $(0,1]$ y su punto medio, para formar dos intervalos, $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ y $\left(\frac{1}{2},1\right]$. Si $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$, entonces el primer dígito de su desarrollo es 0, mientras que si $x \in \left(\frac{1}{2},1\right]$, el primer dígito es 1. Supongamos que $x \in \left(\frac{1}{2},1\right]$; entonces, el siguiente paso consiste en considerar el punto medio de ese intervalo, para formar dos nuevos intervalos, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2^2}\right]$ y $\left(\frac{3}{2^2},1\right]$. Si $x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2^2}\right]$, entonces el segundo dígito de su desarrollo es 0, mientras que si $x \in \left(\frac{3}{2^2},1\right]$, el segundo dígito es 1.

Continuamos de la misma manera, considerando, en cada paso, el punto medio del intervalo en el cual se encuentra x.

Observemos que los primeros n dígitos del desarrollo de x determinan un intervalo de longitud $\frac{1}{2^n}$ en el cual se encuentra x.

Por ejemplo, supongamos que los primeros 5 dígitos del desarrollo de x son 10010. Esto nos dice, considerando cada uno de los dígitos, lo siguiente:

$x \in \left(\frac{1}{2},1\right] = \left(\frac{1}{2},\frac{2}{2}\right]$ ya que su primer dígito es 1.

$x \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2^2}\right] = \left(\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^2}\right]$ ya que su segundo dígito es 0.

$x \in \left(\frac{2}{2^2},\frac{5}{2^3}\right] = \left(\frac{4}{2^3},\frac{5}{2^3}\right]$ ya que su tercer dígito es 0.

$x \in \left(\frac{9}{2^4},\frac{5}{2^3}\right] = \left(\frac{9}{2^4},\frac{10}{2^4}\right]$ ya que su cuarto dígito es 1.

$x \in \left(\frac{9}{2^4},\frac{19}{2^5}\right] = \left(\frac{18}{2^5},\frac{19}{2^5}\right]$ ya que su quinto dígito es 0.

Con esta idea en mente, vamos a demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2. *1. Si $(s_1,s_{2,}\dots s_n)$ y $(r_1,r_{2,}\dots r_n)$ son dos elementos de $\mathbb{B}_n$, distintos, entonces los intervalos $I_{(s_1,s_2,\dots,s_n)}$ y $I_{(r_1,r_2,\dots,r_n)}$ son ajenos.*

2. $\bigcup_{\{(r_1,r_2,\dots,r_n)\in\mathbb{B}_n\}} I_{(r_1,r_2,\dots,r_n)} = (0,1]$.

3. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si $(r_1,r_{2,}\dots,r_n) \in \mathbb{B}_n$, entonces

$$f^{-1}\left(I_{(r_1,r_2,\dots,r_n)}\right) = \left\{(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B} :\ s_k = r_k \text{ para cualquier } k \in \{1,2,\dots,n\}\right\}$$

Demostración

1. Sean $(s_1, s_{2,} \dots s_n)$ y $(r_1, r_{2,} \dots r_n)$ dos elementos distintos de $\mathbb{B}_n$ y definamos

$$k_0 = \text{mín}\,\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : r_k \neq s_k\}$$

Entonces, siguiendo la demostración de la proposición anterior, se tiene que los intervalos $\left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$ y $\left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$ son ajenos.

Además:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right] \subset \left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right] \subset \left(\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}\right]$$

En efecto:

$\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$

$\leq \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{\frac{1}{2^{k_0+1}} - \frac{1}{2^n}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^n}$

$= \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}$

Así que:

$$\sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \leq \sum_{i=1}^{k_0} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}$$

Y, haciendo un desarrollo similar:

$$\sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \leq \sum_{i=1}^{k_0} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^{k_0}}$$

Por lo tanto, los intervalos

$$I_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]$$

y

$$I_{(r_1, r_2, \dots, r_n)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]$$

son ajenos.

2. Para cada $(r_1, r_{2,} \dots, r_n) \in \mathbb{B}_n$, definamos

$$B_{r_1, r_{2,} \dots, r_n} = \left\{(s_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{B} : \ s_k = r_k \text{ para cualquier } k \in \{1, 2, \dots, n\}\right\}$$

Entonces, $\bigcup_{\{(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in\mathbb{B}_n\}} B_{r_1,r_2,\ldots,r_n} = \mathbb{B}$ y, por lo anterior:

$$f\left(B_{r_1,r_2,\ldots,r_n}\right) \subset \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]$$

Por lo tanto:

$$\bigcup_{\{(r_1,r_2,\ldots,r_n)\in\mathbb{B}_n\}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right] = (0,1]$$

3. Por el inciso 2, se tiene:

$$f\left(B_{r_1,r_2,\ldots,r_n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right] = I_{(r_1,r_2,\ldots,r_n)}$$

Así que:

$f^{-1}\left(I_{(r_1,r_2,\ldots,r_n)}\right) = B_{r_1,r_2,\ldots,r_n}$

$= \left\{(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B} : \ s_k = r_k \text{ para cualquier } k \in \{1,2,\ldots,n\}\right\}$

$\blacksquare$

Corolario 1. *1. Si* $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{B}_n$ *y* $x \in (0,1]$, *entonces,* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *son los primeros* n *términos del desarrollo de* x *en base* 2 *si y sólo si*

$$x \in \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada intervalo $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$, donde $k \in \{1,2,\ldots,2^n\}$, existe uno y sólo un elemento $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{B}_n$ tal que

$$I_{(s_1,s_2,\ldots,s_n)} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$$

3. La función $f_n : \mathbb{B}_n \to \left\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$ definida por

$$f_n\left((s_1, s_2, \ldots, s_n)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{2^k}$$

establece una relación uno a uno entre $\mathbb{B}_n$ y el conjunto

$$\left\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$$